2. Rechnen mit Variablen und Termen

2.1 Definitionen und Grundlagen

Definition: Unter einem Term versteht man eine <u>sinnvolle</u> Verknupfung von Zahlen oder Variablen. Ein Ausdruck wie zum Beispiel $3x+4y-5z$ ist sinnvoll, die Variable x wird mit 3 multipliziert, das Vierfache der Variable y addiert und von der Summe das Fünffache der Variable z abgezogen. Im Gegensatz dazu ist der Ausdruck $3x \pm \cdot y - / 4y$ sicher nicht sinnvoll und daher kein Term.

Definition: Die <u>Grundmenge G</u> ist die Menge aller Zahlen, die für die Belegung der Variablen des Terms vorgesehen sind.

Definition: Die <u>Definitionsmenge D</u> ist jene Teilmenge von G für deren Elemente der Term einen sinnvollen Zahlenwert ergibt.

Definition: Als <u>Koeffizient</u> versteht man jene Zahl, mit der eine Variable multipliziert wird.

$$\boxed{3\ \ x} + \boxed{4\ \ y} - \boxed{5\ \ z}$$

3 ist der Koeffizient von x

4 ist der Koeffizient von y

5 ist der Koeffizient von z

Definition: Als <u>Monom</u> versteht man das Produkt aus <u>einem</u> Koeffizienten und einer Variable. Als <u>Binom</u> bezeichnet man die Summe zweier Monome.

2.2 Addition, Subtraktion sowie Multiplikation und Faktorisieren von Termen

Für Terme gelten dieselben Rechenregeln wie bei Zahlen. Insbesonders heißt das:

Terme mit gleichen Variablen werden addiert, indem man die entsprechenden Koeffizienten addiert und mit der gemeinsamen Variablen multipliziert

Auch das <u>Multiplizieren von Klammerausdrücken</u> funktioniert wie bei Zahlen:

Eine Summe wird mit einem Term multipliziert, indem man jeden Summanden mit dem Term multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert.

Es gilt: $5\cdot(a+b) = 5a + 5b$; dieser Zusammenhang lässt sich aber natürlich auch umgekehrt lesen: $5a + 5b = 5\cdot(a+b)$. Offensichtlich lassen sich Summen auch in Produkte umwandeln. Diesen Vorgang nennt man <u>Herausheben (Faktorisieren).</u>

2.3 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Definition: Unter einer Potenz versteht man einen Ausdruck der Form a^n (gesprochen: „a hoch n").

Beispiele:

$$b \cdot b^7 = \\ = b^1 \cdot b^7 = \\ = b^{1+7} = b^8$$

$$b^5 \cdot (-b)^3 = \\ = b^5 \cdot (-b^3) = \\ = -b^5 \cdot b^3 = -b^8$$

$$\frac{b^{x+3}}{b^{7+x}} = \\ = b^{x+3-(7+x)} = \\ = b^{-4} = \frac{1}{b^4}$$

$$(-b^2)^3 = \\ = -(b^2)^3 = \\ = -b^{2\cdot 3} = -b^6$$

$$\left[(-b)^2\right]^3 = \\ = \left[b^2\right]^3 = \\ = b^{2\cdot 3} = b^6$$

$$\left(\frac{2\cdot x}{y^2}\right)^5 = \\ = \frac{(2\cdot x)^5}{(y^2)^5} = \\ = \frac{2^5 \cdot x^5}{y^{2\cdot 5}} = \frac{32 \cdot x^5}{y^{10}}$$

2.4 Potenzieren von Binomen

Binome können selbstverständlich durch oftmaliges Ausmultiplizieren potenziert werden. Besonders die Berechnung zur 2. und 3. Potenz kommt aber sehr oft vor, sodass das Erlernen der Binomischen Formeln zielführend ist.

Es gilt:

$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$
$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

Außerdem gilt:

$(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$
$(a-b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a^2 \cdot b^2 - b^3$

Auch höhere Potenzen lassen sich ganz leicht ausrechnen. Um die Koeffizienten zu finden, verwendet man das Pascal'sche Dreieck.

Dabei notiert man in der ersten Zeile eine 1, in der folgenden Zeile zwei Mal 1. die dritte Zeile beginnt und endet mit 1, die Zahl dazwischen ergibt sich durch Zusammenzählen der darüberstehenden Zahlen,...

$$\begin{array}{ccccccccc|c}
 & & & & 1 & & & & & 0 \\
 & & & 1 & & 1 & & & & 1 \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & 2 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 3 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & 4
\end{array}$$

Die Potenzen in den Summanden erhält man, indem man die Potenzen von a immer um 1 erniedrigt und die von b von 0 startend immer um 1 erhöht.

2.5 Bruchterme

Definition: Einen Term, der im Nenner wenigstens eine Variable enthält, nennt man <u>Bruchterm.</u>

Nur der Klarheit halber: $\frac{3 \cdot x + 4 \cdot y}{5}$ ist kein Bruchterm, im Nenner kommt keine Variable vor; im Gegensatz dazu ist $\frac{3 \cdot x + 4}{5 \cdot y}$ sehr wohl ein Bruchterm!